Ορισμός: Έστω $f: U \to \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^n$, $\bar{X}_0$ σημ. συσ. του U

Τότε η f έχει όριο στο $\bar{X}_0$ το $l \in \mathbb{R}$ $\Leftrightarrow$

$\forall (\bar{X}_\nu) \subseteq U \setminus \{\bar{X}_0\}$, τ.ω $\bar{X}_\nu \to \bar{X}_0$: $f(\bar{X}_\nu) \xrightarrow[\nu \to \infty]{} l$, ή

η f συγκλίνει στο $\bar{X}_0$, στο $l \in \mathbb{R}$.

(Δε μας ενδιαφέρει η συμπεριφορά της f στο $\bar{X}_0$)

, π.χ η f μπορεί να μην ορίζεται στο $\bar{X}_0$

Παρατήρηση: (Μοναδικότητα ορίου).

Έστω ότι η f έχει στο $\bar{X}_0$ τα όρια $l_1, l_2 \in \mathbb{R}$.

Τότε $\forall (\bar{X}_\nu) \subset U \setminus \{\bar{X}_0\}$, $\bar{X}_\nu \to \bar{X}_0$, θα ισχύει

$$\underbrace{f(\bar{X}_\nu)}_{\mathbb{R}} \xrightarrow[\nu \to \infty]{} \underset{\mathbb{R}}{l_1} \quad \text{και} \quad \underbrace{f(\bar{X}_\nu)}_{\mathbb{R}} \xrightarrow[\nu \to \infty]{} \underset{\mathbb{R}}{l_2}$$

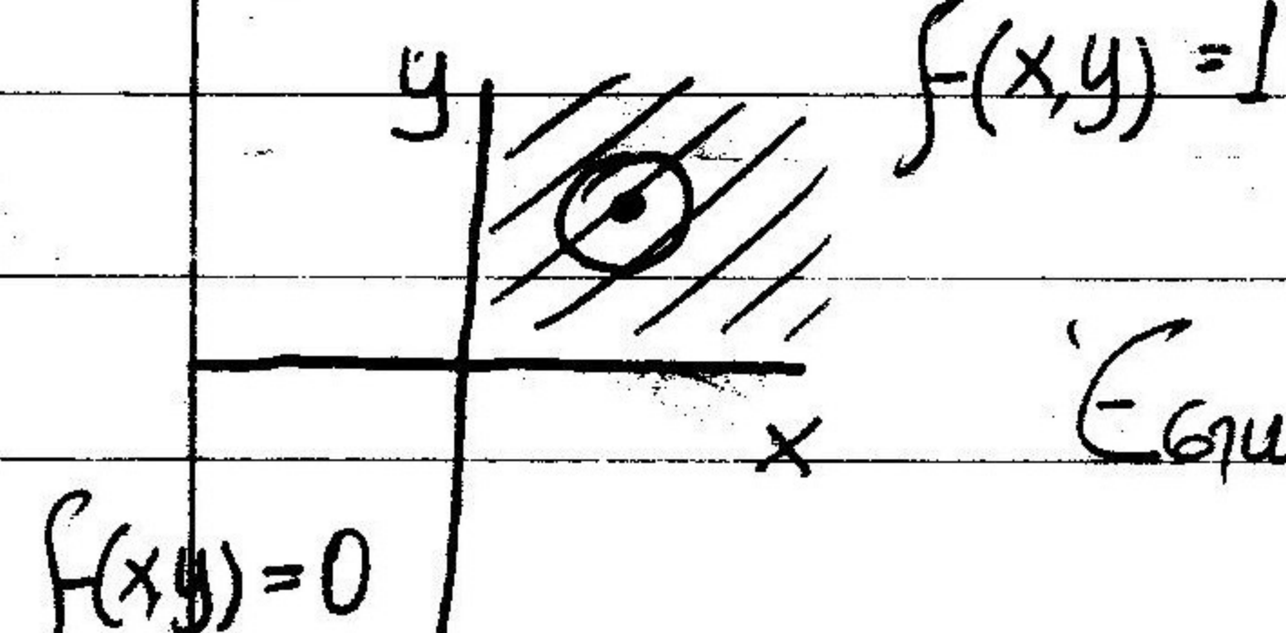
Από τις ιδιότητες συγκλινουσών ακολουθιών στο $\mathbb{R}$, προκύπτει ότι $l_1 = l_2$

Το όριο αυτό συμβολίζεται με $\lim\limits_{\bar{x} \to \bar{x}_0} f(\bar{x}) = l$.

Άσκηση: Έστω $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με $f(x,y) = \begin{cases} 1, & x,y>0 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$

Βρείτε σε ποια σημεία $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$ έχει όριο η f, και ποιο είναι αυτό

Λύση.



Έστω $U = (0,\infty)\times(0,\infty)$, με U ανοιχτό (βλ. προηγ. μάθημα)

Άρα αν $(x_0,y_0) \in U$ $\exists\, \varepsilon>0 : B((x_0,y_0),\varepsilon) \subset U$

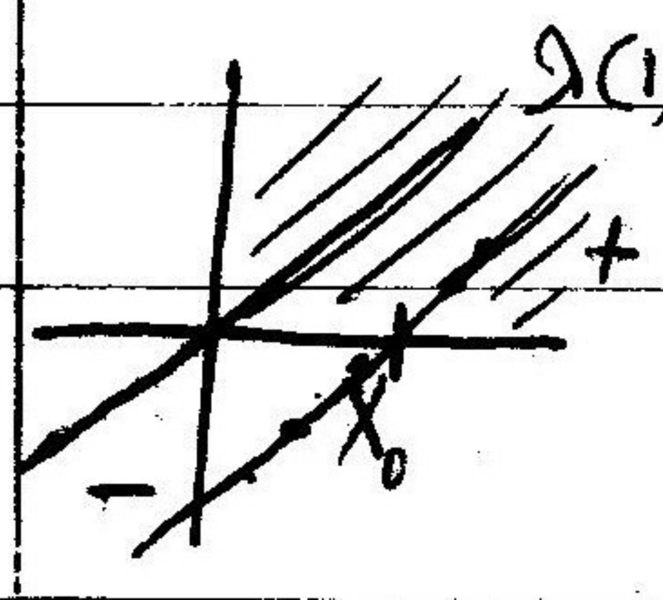
Συνεπώς, αν $\bar{X}_\nu \to \bar{X}_0$, $\bar{X}_\nu \in U\setminus\{\bar{X}_0\}$, τότε

$\exists\, \nu_0\ \forall\, \nu \geq \nu_0 \quad \bar{X}_\nu \in B(\bar{X}_0, \varepsilon)$

Όμως για αυτά τα ν έχω $f(\bar{X}_\nu) = 1 \xrightarrow[\nu\to\infty]{} 1$,

δηλαδή $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = 1$, για $x_0>0$, $y_0>0$

Έστω $(x_0,y_0) = (x_0,0)$, $x_0 \geq 0$ και $(x_\nu,y_\nu) = \left(x_0 \pm \frac{1}{\nu}, \pm\frac{1}{\nu}\right)$



Τότε έχω $f\left(x_0+\frac{1}{\nu}, \frac{1}{\nu}\right) = 1 \xrightarrow[\nu\to\infty]{} 1$,

ενώ $f\left(x_0-\frac{1}{\nu}, -\frac{1}{\nu}\right) = 0 \xrightarrow[\nu\to\infty]{} 0$

Ανάλογα, $f(\frac{1}{\nu}, y_0+\frac{1}{\nu}) = 1 \to 1$, $f(-\frac{1}{\nu}, y_0-\frac{1}{\nu}) = 0 \to 0$ για τα σημεία $(0, y_0)$, $y_0 \geq 0$.

Άρα για τα σημεία στο ∂U η f δεν έχει όριο.

Συνεπώς, $\bar{U} = \partial U \cup U$, έχουμε ότι $\mathbb{R}^n \setminus \bar{U}$ είναι ανοιχτό και εκεί η f έχει όριο 0.

Είπαμε $\lim\limits_{\bar{x}\to\bar{x}_0} f(\bar{x}) = \ell \iff \forall (\bar{x}_\nu) \subset U\setminus\{\bar{x}_0\}$, $\bar{x}_\nu \to \bar{x}_0 \Rightarrow f(\bar{x}_\nu) \to \ell$

(ακολουθιακός ορισμός).

Πρόταση: $\underbrace{\lim\limits_{\bar{x}\to\bar{x}_0} f(\bar{x}) = \ell}_{A} \iff \underbrace{\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0\ \forall \bar{x}\in U\cap B(\bar{x}_0,\delta)\setminus\{\bar{x}_0\}\ |f(\bar{x})-\ell|<\varepsilon}_{B}$

(εψιλοντικός ορισμός).

Απόδειξη: $A \Rightarrow B$. Θα δείξουμε ότι $\neg B \Rightarrow \neg A$ (άρνηση B $\Rightarrow$ άρνηση A)

Έστω ότι $\exists\ \varepsilon>0\ \forall \delta>0\ \exists\ \bar{x}\in U\cap B(\bar{x}_0,\delta)\setminus\{\bar{x}_0\}$
$|f(\bar{x})-\ell| \geq \varepsilon$.

Ειδικότερα: $(\delta=\frac{1}{\nu}>0)$ $\forall \nu\in\mathbb{N}\ \exists\ \bar{x}_\nu \in U\cap B(\bar{x}_0,\frac{1}{\nu})\setminus\{\bar{x}_0\}$
$|f(\bar{x}_\nu)-\ell| \geq \varepsilon$

$\Rightarrow$ Έχω ότι $\bar{x}_\nu \to \bar{x}_0$, αφού $\|\bar{x}_\nu - \bar{x}_0\| < \frac{1}{\nu} \to 0$, αφού $\bar{x}_\nu \in B(\bar{x}_0, \frac{1}{\nu})$. Όμως $f(\bar{x}_\nu) \not\to \ell$ $(|f(\bar{x}_\nu)-\ell| \geq \varepsilon >0$

$A \Leftarrow B$.

Έστω $(\bar{X}_\nu) \subset U \setminus \{\bar{X}_0\}$, $\bar{X}_\nu \to \bar{X}_0$ και έστω $\varepsilon > 0$.
Τότε από το B $\exists\, \delta > 0$ $\forall\, \bar{x} \in U \cap B(\bar{X}_0, \delta) \setminus \{\bar{X}_0\}$
$|f(\bar{X}) - \ell| < \varepsilon$

Από την άλλη έχω για το δοσμένο $\delta > 0$ $\exists\, \nu_0 \in \mathbb{N}$ $\forall\, \nu \geq \nu_0$:
$\underbrace{\bar{X}_\nu \in B(\bar{X}_0, \delta)}$ $\Leftrightarrow \|\bar{X}_\nu - \bar{X}_0\| \leq \delta$.

Συνεπώς $\forall\, \nu \geq \nu_0$ $|f(\bar{X}_\nu) - \ell| < \varepsilon$ ~ $f(\bar{X}_\nu) \to \ell$.

Προκύπτει έτσι ότι ακολουθιακός και εψιλονικός ορισμός είναι ισοδύναμοι.

Πράξεις μεταξύ διανυσματικών συναρτήσεων (n, m)

Έστω $\bar{f}, \bar{g} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $n, m \in \mathbb{N}$.
Ορίζω:

$$(\bar{f} \pm \bar{g})(\bar{x}) = \bar{f}(\bar{x}) \pm \bar{g}(\bar{x}) \in \mathbb{R}^m,\ \forall\, \bar{x} \in \mathbb{R}^n$$

$$(\bar{f} \cdot \bar{g})(\bar{x}) = \bar{f}(\bar{x}) \cdot \bar{g}(\bar{x}) \in \mathbb{R}^m,\ \forall\, \bar{x} \in \mathbb{R}^n$$

$$(\lambda \bar{f})(\bar{x}) = \lambda \cdot \bar{f}(x) \in \mathbb{R}^m,\ \forall\, \lambda \in \mathbb{R},\ \forall\, \bar{x} \in \mathbb{R}^n$$

Αν $\bar{g}(\bar{x}) \neq 0_m$ $\forall\, \bar{x} \in \mathbb{R}^n$, ορίζω $\left(\frac{\bar{f}}{\bar{g}}\right)(\bar{x}) = \frac{\bar{f}(\bar{x})}{\bar{g}(\bar{x})}$,
$\in \mathbb{R}^m$, $\forall\, \bar{x} \in \mathbb{R}^n$.

Σύνθεση

Ας είναι $\bar{f}, \bar{g}$ δυο διανυσματικές συναρτήσεις με πεδία ορισμού A, B αντίστοιχως.
Τότε ονομάζουμε σύνθεση της $\bar{f}$ με την $\bar{g}$, και τη συμβολίζουμε με $\bar{g} \circ \bar{f}$, τη συνάρτηση με τύπο:

$$(\bar{g} \circ \bar{f})(\bar{x}) = \bar{g}(\bar{f}(\bar{x})).$$

Το πεδίο ορισμού της $\bar{g} \circ \bar{f}$ αποτελείται από όλα τα στοιχεία $\bar{x}$ του πεδίου ορισμού της $\bar{f}$ για τα οποία το $\bar{f}(\bar{x})$ ανήκει στο πεδίο ορισμού της $\bar{g}$.
Δηλαδή είναι το σύνολο: $A_1 = \{\bar{x} \in A : f(\bar{x}) \in B\}$

Είναι φανερό ότι η $\bar{g} \circ \bar{f}$ ορίζεται αν $A_1 \neq \phi$,
δηλαδή αν $\bar{f}(A) \cap B \neq \phi$.